E.S.E.O. - E.S.T.I.T. - H.E.I. - I.C.P.I. LYON - I.S.E.N. LILLE TOULON - I.S.E.P.

CONCOURS D'ENTREE EN 1re ANNEE DU CYCLE INGENIEURS 1991

DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

SERIE M

Mardi 7 mai 1991 de 8 h à 12 h

ATTENTION : Votre copie est destinée à être corrigée et notée. Il sera tenu compte de la qualité de la présentation et de l'orthographe.

Dans ce problème on étudie les éléments propres des endomorphismes symétriques positifs continus d'un espace préhilbertien réel. La partie I est consacrée à l'étude de différentes situations. Dans la partie III on étudie le cas où l'espace est euclidien et on obtient une caractérisation des valeurs propres, puis on tente de généraliser, dans la partie IV, au cas d'un espace préhilbertien.

Les différentes parties sont largement indépendantes dans la mesure où la plupart des résultats sont fournis par l'énoncé.

Notations : Dans tout le problème :

- E désigne un espace préhilbertien réel de dimension finie ou non. Le produit scalaire sera noté $(x|y)$ et la norme euclidienne $\|x\|$.
- Si $u_1, \ldots, u_p$ sont p vecteurs de E on note $\text{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$ le sous espace de E engendré par ces p vecteurs.
- Si F est une partie non vide de E, $F^\perp$ désigne l'orthogonal de F.
- S désigne la sphère unité de E : $S = \{x \in E \ ; \ \|x\| = 1\}$.
- $\mathcal{L}_C(E)$ désigne l'espace vectoriel des endomorphismes continus de E.
- Si f est un endomorphisme de E, on pose : $\Phi_f(x) = (f(x)|x)$.

Définitions

- On rappelle qu'un endomorphisme f de E est dit symétrique si :

$$\forall (x,y) \in E^2 \ , \quad (f(x)|y) = (x|f(y))$$

- Un endomorphisme symétrique f de E est dit positif si : $\forall x \in E \quad \Phi_f(x) \geqslant 0$.

Rappels E est supposé de dimension quelconque (finie ou non).

1) Si f est un endomorphisme de E, f est continu (sur E) si et seulement si il existe $k \geqslant 0$ tel que : $\forall x \in E \quad \|f(x)\| \leqslant k\|x\|$.

2) Pour $f \in \mathcal{L}_C(E)$, on pose : $N(f) = \sup \left\{ \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} / \ x \in E, \ x \neq 0 \right\}$.

N est alors une norme sur $\mathcal{L}_C(E)$ et :

$N(f) = \sup \{\|f(x)\| / \ x \in E, \ \|x\| = 1\} = \sup \left\{ \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} / \ x \in E, \ x \neq 0, \|x\| \leqslant 1 \right\}$;

enfin, pour tout x de E, on a : $\|f(x)\| \leqslant N(f) \ \|x\|$.

PARTIE I

1) On prend $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique.

Soit f l'endomorphisme de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de f et en déduire une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

2) Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles définies et continues sur [0,1].
On sait alors que : $(f|g) = \int_0^1 f(x) \ g(x) \ dx$ définit un produit scalaire sur E (inutile de le redémontrer).

a) Soit $T : f \mapsto Tf$ avec : $\forall x \in [0,1] \quad Tf(x) = xf(x)$.
Montrer que T est un endomorphisme symétrique positif continu de E.
T admet-il des valeurs propres ?

b) Si K est une fonction réelle continue sur [0,1]x[0,1] et vérifiant : $\forall (x,y) \in [0,1]x[0,1], \ K(x,y) = K(y,x)$, on pose $T_K : f \mapsto T_K f$

avec : $\forall x \in [0,1] \ , \ T_K f(x) = \int_0^1 K(x,y) \ f(y) \ dy$.

Montrer que T_K est un endomorphisme symétrique continu de E.

c) Dans cette question on prend $K : (x,y) \mapsto \begin{cases} x(1-y) \text{ si } x \leqslant y \\ y(1-x) \text{ si } y \leqslant x \end{cases}$

Montrer que pour tout f de E, $T_K(f)$ est de classe C^2 sur [0,1] et calculer la dérivée seconde de $T_K f$ en fonction de f.

Si λ est valeur propre de T_K et f un vecteur propre associé, montrer que f est de classe C^2 sur [0,1] et que : $f(0) = f(1) = 0$. En déduire les valeurs propres et vecteurs propres de T_K.

A SUIVRE

PARTIE II

E est de dimension quelconque (finie ou non) et f désigne un endomorphisme symétrique positif continu de E.

Soit $\varphi_f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,y) \mapsto (f(x)|y)$

1) Montrer que φ_f est une forme bilinéaire symétrique de E et que :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \varphi_f(x,y) = \frac{1}{4}\left(\Phi_f(x+y) - \Phi_f(x-y)\right).$$

2) On pose : $\mu = \sup_{(x,y)\in S^2} \varphi_f(x,y)$. Vérifier que μ est bien définie, et que : $\mu \leqslant N(f)$.

3) On pose : $\lambda = \sup_{x\in S} \Phi_f(x)$.

a) Montrer que : $\lambda \leqslant N(f)$.

b) Montrer que : $\forall x \in E,\ 0 \leqslant \Phi_f(x) \leqslant \lambda \|x\|^2$.

c) Montrer que : $\lambda = \mu$, et en déduire que :

$$\forall (x,y) \in E^2, \ \varphi_f(x,y) \leqslant \lambda \|x\| \|y\|.$$

4) A partir des résultats précédents, montrer que : $\lambda = N(f)$.

5) Soit F un sous espace de E stable par f.
Démontrer que son orthogonal $F^{\perp}$ est stable par f.

PARTIE III

Dans cette partie on suppose que E est euclidien, de dimension n ; f est toujours un endomorphisme symétrique positif de E.

1) Si $\lambda = \sup_{x\in S} \Phi_f(x)$, établir l'existence d'un x_0 de S tel que : $\lambda = \Phi_f(x_0)$.

2) En utilisant l'inégalité du II.3) b) montrer que :

$$\forall x \in E, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad t^2\left(\lambda\|x\|^2 - \Phi_f(x)\right) + 2t\,(x \mid \lambda x_0 - f(x_0)) \geqslant 0$$

et en déduire que λ est valeur propre de f et que x_0 est un vecteur propre associé.

3) En utilisant II.5) et le résultat précédent, démontrer l'existence de n valeurs propres de f : $\lambda_0 \geqslant \lambda_1 \ldots \geqslant \lambda_{n-1} \geqslant 0$, et d'une base orthonormale $(e_0, \ldots, e_{n-1})$ de E, formée de vecteurs propres associés tels que : $\forall i \in \{0,\ldots,n-1\} \quad \lambda_i = N(f_i)$
où f_i est l'endomorphisme de $E_i^{\perp}$ défini par : $\forall x \in E_i^{\perp}$, $f_i(x) = f(x)$
avec $E_0 = \{0\}$ et $E_i = \text{Vect}(e_0, \ldots, e_{i-1})$ pour $i \geqslant 1$.

Etablir : $\forall x \in E$, $f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i (x|e_i)\, e_i$.

PARTIE IV

E est maintenant de dimension non finie. Un endomorphisme continu f de E est dit complètement continu si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée de E il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la suite $(f(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans E.

1) Soit f un endomorphisme continu de E et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de E.

a) Montrer que la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

b) On suppose que Imf est de dimension finie. Démontrer que f est alors complètement continu.

2) Soit F un sous espace de E de dimension finie. Pour tout x de E on note $\rho(x)$ la projection orthogonale de x sur F.

a) Si $(e_1,\ldots,e_n)$ est une base orthonormale de F, donner l'expression de $\rho(x)$ dans cette base.

b) Montrer que $x \mapsto \rho(x)$ est un endomorphisme symétrique positif et complètement continu de E.

3) Soit f un endomorphisme symétrique positif continu non nul de E et $\lambda = \sup_{x\in S} \Phi_f(x)$.

a) Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de S telle que la suite $(\Phi_f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers λ. Démontrer que la suite $(f(x_n) - \lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

b) On suppose de plus f complètement continu. Montrer qu'alors λ est valeur propre de f.

A SUIVRE

A partir de maintenant f désigne un endomorphisme symétrique positif complètement continu et non nul de E.

4) Etablir l'existence d'une suite décroissante positive $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de valeurs propres de f et d'une famille orthonormale $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs propres associés telles que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda_n = N(f_n)$
où f_n est l'endomorphisme de $E_n^\perp$ défini par : $\forall x \in E_n^\perp,\ f_n(x) = f(x)$
avec $E_0 = \{0\}$ et $E_n = \text{Vect}(e_0,\ldots,e_{n-1})$ pour $n \geqslant 1$.

5) On se propose de démontrer que la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. On pose $\delta = \inf_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n$.

a) Si $\delta > 0$ montrer que la suite $\left(\frac{e_n}{\lambda_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

b) Peut-on extraire de $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergente ?

c) En déduire le résultat annoncé.

6) Soit $x \in E$ et $n \geqslant 1$. On pose : $x_n = x - \sum_{i=0}^{n-1} (x|e_i)e_i$.

a) Montrer que $x_n \in E_n^\perp$ et que : $\|x_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=0}^{n-1} (x|e_i)^2$.

b) En déduire que : $\forall n \geqslant 1,\ \|f(x_n)\| \leqslant \lambda_n \|x_n\|$, et que la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

c) Montrer que : $\forall x \in E,\ f(x) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \lambda_n (x|e_n)e_n$. Que représente le vecteur $(x|e_n)e_n$?

7) On se propose de démontrer que toutes les valeurs propres non nulles de f figurent dans la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) Si x_1 et x_2 sont deux vecteurs propres de f associés à des valeurs propres distinctes, montrer que : $(x_1|x_2) = 0$.

b) En déduire le résultat annoncé.

FIN